Analisi Sismica

Consideriamo il problema di partenza e la sua particolarizzazione nel caso sismico:

$$\begin{cases} \mathbb{M}\ddot{q}(t) + \mathbb{C}\dot{q}(t) + \mathbb{K}q(t) = f(t) \\ q(0) = q_0 \\ \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases}$$

$$q(t) = \sum_{k=1}^{\bar{m}} \psi_k p_k(t) \quad \bar{m} < n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{p}_k(t) + 2\xi_k \omega_k \dot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t) = \frac{1}{m_k}\psi_k^T f(t) \\ p_k(0) = p_{k0} \\ \dot{p}_k(0) = \dot{p}_{k0} \end{cases}$$

CASO SISMICO

$$\begin{cases} f(t) = -\mathbb{M}\tau\ddot{u}(t) \\ q(0) = \dot{q}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{p}_k(t) + 2\xi_k\omega_k\dot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t) = -g_k\ddot{u}(t) \\ p_k(0) = \dot{p}_k(0) = 0 \end{cases}$$

Con $g_k = \frac{1}{m_k}\psi_k^T \mathbb{M}\tau$ coefficiente di partecipazione modale, esprimibile anche come segue ($k = 1, \dots, n$):

$$g_k = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \psi_{ki} m_{ij} \tau_j}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\psi_{ki}\psi_{kj}}, \text{ con } \mathbb{M} \text{ diagonale} \Rightarrow g_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_{jj}\psi_{kj}\tau_j}{\sum_{j=1}^{n} m_{jj}\psi_{kj}^2},$$

con autovettori ortonormali $m_k = 1 \Rightarrow g_k = \sum_{j=1}^{n} m_{jj}\psi_{kj}\tau_j$

In parole g_k rappresenta il lavoro compiuto dalla forza esterna $\mathbb{M}\tau$ quando la struttura si deforma secondo la k-esima forma modale ψ_k. Il coefficiente di partecipazione modale assume valori significativi quando il modo rappresentato dallo ψ_k corrispondente viene attivato dalla forza esterna. Se τ fosse proporzionale a ψ_k avremmo $g_k = 1$ e $g_j = 0$; si attiva il modo k-esimo, mentre gli altri non vengono coinvolti.

Con autovettori ortonormali:

$$\Psi^T \cdot \mathbb{M} \cdot \Psi = \mathbb{I} \Rightarrow \Psi \cdot \Psi^T \cdot \mathbb{M} \cdot \Psi = \Psi \cdot \mathbb{I} \Rightarrow (\Psi \cdot \Psi^T \cdot \mathbb{M} - \mathbb{I})\Psi = \mathbb{0}$$

$$\Rightarrow \Psi \cdot \Psi^T \mathbb{M} \cdot \mathbb{M}^{-1} = \mathbb{I} \cdot \mathbb{M}^{-1} \Rightarrow \Psi \cdot \Psi^T = \mathbb{M}^{-1}$$

Introducendo g:

$$g = \Psi^T \cdot \mathbb{M} \cdot \tau \Rightarrow g^T \cdot g = \tau^T \cdot \mathbb{M}\,\Psi \cdot \Psi^T \mathbb{M}\tau = \tau^T \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbb{M}^{-1} \cdot \mathbb{M} \cdot \tau =$$
$$= \tau^T \cdot \mathbb{M} \cdot \tau = M_{tot}$$

Possiamo definire la massa partecipante $\mathcal{E}^{(k)}$ e la percentuale di massa partecipante $\mathcal{E}_{\%}^{(k)}$ relativamente al modo k-esimo.

$$\mathcal{E}^{(k)} = \frac{g_k^2}{g^T \cdot g} = \frac{g_k^2}{M_{tot}} \Rightarrow \mathcal{E}_{\%}^{(k)} = \frac{g_k^2}{M_{tot}} \cdot 100$$

Per i primi $\bar{m} < n$ modi la percentuale di massa totale coinvolta è:

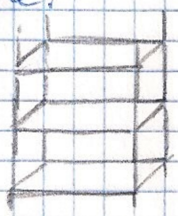
$$\mathcal{E}_{\bar{m}\%} = \sum_{k=1}^{\bar{m}} \mathcal{E}_{\%}^{(k)}$$

Strutture multipiano spaziali

Nel caso di una struttura intelaiata multipiano shear-type (cioè con impalcati infinitamente rigidi nel proprio piano) il problema sismico assume la seguente configurazione:

$$q(t)=\begin{Bmatrix} q_x(t)\\ q_y(t)\\ q_\theta(t)\end{Bmatrix} \qquad q(t)=\sum_{j=1}^{m}\psi_j\, p_j(t) \qquad \psi_j=\begin{Bmatrix}\psi_{jx}\\ \psi_{jy}\\ \psi_{j\theta}\end{Bmatrix}$$

$$m\leq 3m$$



Si considerano le traslazioni nelle direzioni x e y e la rotazione intorno a z. In generale i modi sono accoppiati ma una delle componenti degli autovettori può prevalere sulle altre generando un modo traslazionale in una direzione o rotazionale. Definita la matrice delle masse M come di seguito i modi traslazionali sono così definiti:

$$M=\begin{bmatrix} m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix} \qquad g_x=\Psi^T\cdot M\cdot \tau_x,\ \tau_x=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow g_{x,j}=\psi_j^T M \tau_x=\psi_{jx}^T\, m\cdot 1$$

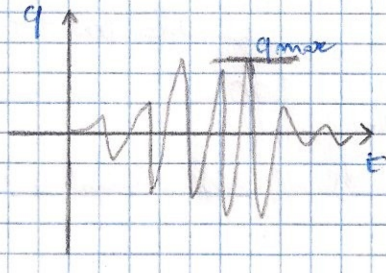
$$g_y=\Psi^T\cdot M\cdot \tau_y,\ \tau_y=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow g_{y,j}=\psi_j^T\cdot M\, \tau_y=\psi_{jy}^T\, m\cdot 1$$

Per la rotazione abbiamo infine:

$$g_\theta=\Psi^T\cdot M\cdot \tau_\theta,\ \tau_\theta=\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix} \Rightarrow g_{\theta,j}=\psi_j^T\cdot M\, \tau_\theta=\psi_{j\theta}^T\, I\, 1$$

Soluzione delle equazioni del moto sismico mediante lo spettro di risposta

La soluzione delle equazioni del moto sismico avviene secondo i metodi classici dei sistemi a un grado di libertà se è nota la legge temporale $\ddot{u}(t)$. Se invece il terremoto è noto mediante il suo spettro di risposta $S_a(T)$ si possono generare storie temporali $\ddot{u}(t)$ da esso e procedere con i metodi classici oppure impiegare direttamente lo spettro. Seguiamo questo metodo essendo esso il più usato nel settore ingegneristico. Dato lo spettro spostamento-tempo dovuto al sisma definiamo il valore in modulo dello spostamento massimo:



$$q_{max}=\frac{S_a(T_0,\xi)}{\omega_0^2}$$

Tale spostamento vale per i sistemi a un grado di libertà. Per quelli a n gradi di libertà abbiamo invece vari spettri, uno per ciascun k che va da 1 a $\bar{n} < n$:

$$q(t) = \sum_{k=1}^{\bar{n}} \psi_k p_k(t) \quad \bar{n} < n$$

$$\begin{cases} \ddot{p}_k(t) + 2\xi_k \omega_k \dot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t) = -g_k \ddot{u}(t) \\ p_k(0) = \dot{p}_k(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow p_{kmax} = \frac{|g_k| \, S_a(T_k, \xi_k)}{\omega_k^2}$$

I valori p_{kmax} si realizzano generalmente non contemporaneamente, quindi $q_{j\,max} \leq \sum_k |\psi_k| p_{kmax}$. Dato $q_k(t)$ spostamento della struttura nel caso in cui siano impediti tutti gli spostamenti associati ai modi diversi dal k-esimo, $q_k(t) = \psi_k p_k(t)$, si avrà:

$$q(t) = \sum_{k=1}^{\bar{n}} q_k(t)$$

Ovvero lo spostamento totale è scomponibile nella sovrapposizione di spostamenti legati ciascuno ad ogni singolo modo.

Se inoltre $e_k(t)$ è un effetto (spostamento, forza, momento) associato allo spostamento modale $q_k(t)$ si ha analogamente:

$$e(t) = \sum_{k=1}^{\bar{n}} e_k(t)$$

Se abbiamo $q_{kmax} = \psi_k p_{kmax}$ avremo anche l'effetto massimo associato al k-esimo modo di vibrazione:

$$e_{kmax} = \max\{e_k(t)\} \qquad e_{max} \leq \sum_k e_{kmax}$$

Esistono varie regole per combinare gli effetti. Si tratta delle regole di combinazione modale:

- regola SUM (summation):

$$e_{max} = \sum_k e_{kmax}$$

È molto cautelativa. È inoltre rigorosa quando più modi sono accomunati da identici ξ e ω (e i p_{kmax} si realizzano contemporaneamente) o quando ω è tanto grande e la risposta è quasi statica (di nuovo i p_{kmax} si realizzano contemporaneamente);

- regola SRSS (square root of sum of square):

$$e_{max} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\bar{n}} e_{kmax}^2}$$

Dà stime mediamente corrette, gravemente sottostimate se invece siamo nei due casi in cui la SUM è rigorosa, infatti:

$$e_{max} = \sum_k e_{kmax} = \sqrt{\left[\sum_k e_{kmax}\right]^2} = \sqrt{\sum_k e_{kmax}^2 + \sum_{i \neq j} \sum e_{imax} e_{jmax}} \geq \sqrt{\sum_k e_{kmax}^2}$$

- regola CQC (complete quadratic combination):

$$e_{max} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\bar{m}} \sum_{j=1}^{\bar{m}} c_{ij}\, e_{imax} \cdot e_{jmax}}$$

È la generalizzazione delle due regole precedenti; per $c_{ij} = 1$ si ha la SUM, per $c_{ij} = \delta_{ij}$ si ha la SRSS. Di solito si assegna c_{ij} tendente a 1 se si è nelle condizioni rigorose della regola SUM, a 0 (zero) negli altri casi. Una semplice esplicitazione della CQC è:

$$c_{ij} = \frac{1}{1+\varepsilon_{ij}}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\omega_i - \omega_j}{\xi_i \omega_i + \xi_j \omega_j}$$

Analisi statica equivalente

Anziché eseguire un'analisi completamente dinamica è possibile sfruttare le forze statiche equivalenti. Per un sistema a n gradi di libertà si definisce k-esima forza statica equivalente f_{keq} quella forza che, applicata staticamente alla struttura, produce lo spostamento massimo modale q_{kmax}:

$$f_{keq} = K\, q_{kmax} \quad k = 1, \dots, \bar{m} < m$$

Premoltiplichiamo per ψ_k^T ricordando che $q_{kmax} = \psi_k\, p_{kmax}$:

$$\psi_k^T f_{keq} = \psi_k^T K\, \psi_k\, p_{kmax} = k_k\, p_{kmax} = m_k \omega_k^2\, p_{kmax} =$$
$$= \psi_k^T\, M\, \psi_k\, \omega_k^2\, p_{kmax}$$
$$\Rightarrow f_{keq} = M\, \psi_k\, \cancel{\omega_k^2}\, \frac{g_k \cdot S_a(T_k, \xi_k)}{\cancel{\omega_k^2}} = M\, \psi_k\, g_k \cdot S_a(T_k, \xi_k)$$

La regola di combinazione modale fa sì che l'analisi statica equivalente per sistemi a n gradi di libertà fornisca soluzioni approssimate (a differenza dei sistemi a un grado di libertà per cui la soluzione è esatta). La combinazione viene applicata sugli effetti modali massimi e_{kmax}.

Smorzamento non classico

Se lo smorzamento non è classico perdiamo la proprietà fisica degli autovettori, ma è possibile disaccoppiare le equazioni nello spazio di stato. Tuttavia si lavora con i numeri complessi. Si passa a $2n$ equazioni differenziali al I ordine dalle n al II ordine:

$$M \cdot \ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + K q(t) = f(t)$$

Si definisce inoltre il seguente vettore delle variabili di stato e si riformula il problema:

$$\underset{2n\times1}{\mathbb{Z}(t)} = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \qquad \ddot{q}(t) = -\mathbb{M}^{-1}\cdot\mathbb{C}\,\dot{q}(t) - \mathbb{M}^{-1}\cdot\mathbb{K}\,q(t) + \mathbb{M}^{-1}\cdot f(t)$$

Inoltre si introduce la matrice dinamica del sistema a n g.d.l. analoga a quella dei sistemi a 1 g.d.l.:

$$\underset{2n\times2n}{\mathbb{A}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{O}_{n\times n} & \mathbb{I}_{n\times n} \\ \hline -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K} & -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{C} \end{array}\right], \quad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{n\times n} \\ \mathbb{M}^{-1}_{n\times n} \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbb{Z}}(t) = \mathbb{A}\cdot\mathbb{Z}(t) + \mathbb{V}\, f(t)$$

$\mathbb{A}$ non è simmetrica e conduce a valori complessi. Se il sistema è libero e $\mathbb{A}$ non simmetrica si ha $\dot{\mathbb{Z}}(t) = \mathbb{A}\,\mathbb{Z}$ e si giunge alla soluzione $\mathbb{Z} = \mathbb{d}\cdot e^{\eta t}$, con $\mathbb{d}$ autovettori destri. Si ottiene un problema agli autovalori (complessi, sono gli η):

$$\eta\,\mathbb{d}\cdot e^{\eta t} = \mathbb{A}\,\mathbb{d}\cdot e^{\eta t} \Rightarrow (\mathbb{A} - \eta\mathbb{I})\,\mathbb{d} = \mathbb{O}$$

Esiste analogo il problema agli autovalori sinistri $(\mathbb{A}^T - \eta\mathbb{I})\,\mathbb{s} = \mathbb{O}$. Da $\mathbb{d}$ e $\mathbb{s}$ è possibile costruire una nuova base che disaccoppia il problema in $2n$ equazioni separate $\forall\,\mathbb{C}$.

Consideriamo il generico autovalore complesso:

$$\eta_i = \mu_i \pm i\,\nu_i$$

La parte reale μ_i dà l'ampiezza del moto, quella immaginaria ν_i fornisce la pulsazione. Se la risposta è $\mathbb{Z}_i = \mathbb{d}_i e^{\eta_i t}$:

$$e^{\eta_i t} = e^{\mu_i t}\cdot e^{\pm i\nu_i t} = e^{\mu_i t}\cdot e^{[\cos(\nu_i t) \pm i \sin(\nu_i t)]}$$

Per quanto riguarda la parte reale:

- se $\mu_i < 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e^{\mu_i t} = 0$, soluzione asintoticamente stabile;
- se $\mu_i > 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e^{\mu_i t} = \infty$, soluzione asintoticamente instabile.

Ricordando la soluzione dei sistemi classicamente smorzati, in cui compare $e^{-\xi_k \omega_k t}$, possiamo confrontare gli esponenziali reale e complesso:

$$\mu_k \cong -\xi_k\omega_k \Rightarrow \xi_k \cong -\frac{\mu_k}{\omega_k} \Rightarrow \omega_{dk} = \omega_k\sqrt{1-\xi_k^2} \cong \omega_k\sqrt{1-\frac{\mu_k^2}{\omega_k^2}} \cong \nu_k$$

$$\Rightarrow \sqrt{\omega_k^2 - \mu_k^2} \cong \nu_k \Rightarrow \omega_k \cong \sqrt{\mu_k^2 + \nu_k^2}$$

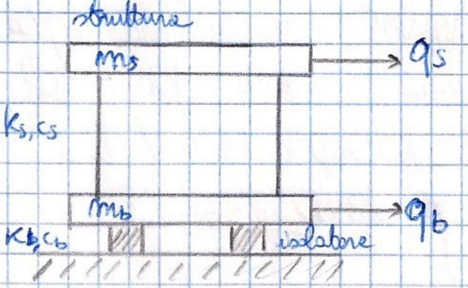
Nel caso di sistemi controllati e per lo studio di interazioni fluido-struttura è necessario usare l'analisi modale complessa con disaccoppiamento nello spazio di stato. Non è infatti possibile prendere $\mathbb{C}$ proporzionale a $\mathbb{M}$ e $\mathbb{K}$. Per i sistemi controllati è tuttavia possibile introdurre una ξ_{eq}.

Controllo delle vibrazioni delle strutture

Nel progetto statico ($\mathbb{K}\cdot q = f$) è possibile intervenire solo su $\mathbb{K}$ (rigidezza del sistema) per ridurre gli spostamenti. Nel progetto dinamico ($\mathbb{M}\cdot\ddot{q}(t) + \mathbb{C}\dot{q}(t) + \mathbb{K}q(t) = f(t)$) possiamo invece modificare anche $\mathbb{M}$ e $\mathbb{C}$. A tale fine vengono ideati e disposti sistemi di controllo delle vibrazioni delle strutture. Quelli passivi non richiedono apporto di energia per funzionare, quelli attivi invece la richiedono, infine gli ibridi combinano i due meccanismi di funzionamento.

Tra i passivi abbiamo i dissipatori (ad attrito viscoelastico, si aggiunge alla $\mathbb{C}$ standard una $\mathbb{C}_{mix}$), gli isolatori e gli smorzatori accordati (TMD).

Gli isolatori impediscono o limitano il passaggio di forze:



$$\begin{cases} m_b\cdot\ddot{q}_b + (c_b+c_s)\dot{q}_b - c_s\dot{q}_s + (k_b+k_s)q_b - k_s q_s = -m_b\ddot{u}(t) \\ m_s\cdot\ddot{q}_s + c_s\dot{q}_s - c_s\dot{q}_b + k_s q_s - k_s q_b = -m_s\ddot{u}(t) \end{cases}$$

Cambiamo le coordinate, $q_s = q_b + x_s$:

$$\begin{cases} m_b\cdot\ddot{q}_b + c_b\dot{q}_b + \cancel{c_s\dot{q}_b} - \cancel{c_s\dot{q}_b} - c_s\dot{x}_s + k_b q_b + \\ \quad + \cancel{k_s q_b} - \cancel{k_s q_b} - k_s x_s = -m_b\ddot{u}(t) \\ m_s\ddot{q}_b + m_s\ddot{x}_s + \cancel{c_s\dot{q}_b} + c_s\dot{x}_s - \cancel{c_s\dot{q}_b} + \cancel{k_s q_b} + \\ \quad + k_s x_s - \cancel{k_s q_b} = -m_s\ddot{u}(t) \end{cases}$$

Riscriviamo e sommiamo membro a membro:

$$\begin{cases} m_b\ddot{q}_b + c_b\dot{q}_b - c_s\dot{x}_s + k_b q_b - k_s x_s = -m_s\ddot{u}(t) \\ m_s\ddot{q}_b + m_s\ddot{x}_s + c_s\dot{x}_s + k_s x_s = -m_s\ddot{u}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m_b+m_s)\ddot{q}_b + m_s\ddot{x}_s + c_b\dot{q}_b + k_b q_b = -(m_b+m_s)\ddot{u}(t)$$

Detta $m_b + m_s = m_{tot}$ e tenendo la seconda equazione del sistema:

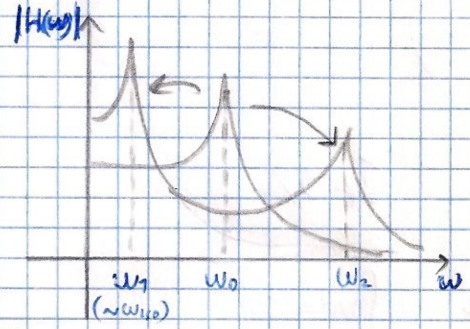
$$\begin{cases} m_{tot}\ddot{q}_b + m_s\ddot{x}_s + c_b\dot{q}_b + k_b q_b = -m_{tot}\ddot{u}(t) \\ m_s\cdot\ddot{q}_b + m_s\ddot{x}_s + c_s\dot{x}_s + k_s x_s = -m_s\ddot{u}(t) \end{cases}$$

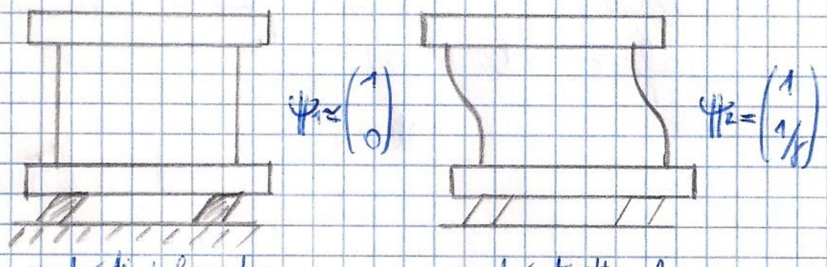
Divisa la prima equazione per m_{tot}, la seconda per m_s e detti $\omega_s^2 = \frac{k_s}{m_s}$, $\omega_{iso}^2 = \frac{k_b}{m_{tot}}$, $2\xi\omega_s = \frac{c_s}{m_s}$, $2\xi_{iso}\omega_{iso} = \frac{c_b}{m_{tot}}$ e $\gamma = \frac{m_s}{m_{tot}}$ si ottiene:

$$\begin{cases} \ddot{q}_b + \gamma\ddot{x}_s + 2\xi_{iso}\omega_{iso}\dot{q}_b + \omega_{iso}^2 q_b = -\ddot{u}(t) \\ \ddot{x}_s + \ddot{q}_b + 2\xi\omega_s\dot{x}_s + \omega_s^2 x_s = -\ddot{u}(t) \end{cases}$$

Scritto il sistema in forma matriciale si può risolvere il problema agli autovalori, $(\mathbb{K} - \lambda\mathbb{M})\Psi = 0$, per ottenere le frequenze proprie. Tralasciando la risoluzione del problema, facciamo solo alcune considerazioni sui modi di oscilla-

zione. L'isolatore agisce a livello di partecipazione modale, cioè allunga il periodo della struttura riducendo le forze indotte dal sisma sulla struttura attraverso la riduzione della pseudo-accelerazione.
I modi sono:

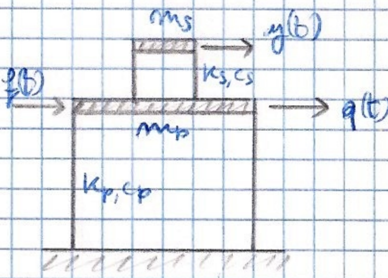




modo di isolamento modo strutturale

Si ha $\omega_{iso}^2 << \omega_0^2$, $\omega_1 < \omega_{iso} << \omega_2$ $(\omega_1 \simeq \omega_{iso})$ e $\omega_2 > \omega_0$ $(\omega_2 >> \omega_0)$.

L'uso di smorzatori a massa accordata prevede l'inserimento di masse che aumentano lo smorzamento essendo in risonanza o quasi-risonanza con uno dei modi a cui la struttura principale è sensibile. Mentre gli isolatori sono efficaci con il sisma, gli smorzatori TMD ("tuned mass dampers") sono indicati per il vento e le "human induced vibrations" (vibrazioni prodotte da grandi folle come ai concerti e negli stadi). Scriviamo le equazioni:



$$\begin{cases} m_p\ddot{q} + (c_p+c_s)\dot{q} - c_s\dot{y} + (k_p+k_s)q - k_s y = f \\ m_s\ddot{y} - c_s\dot{q} + c_s\dot{y} - k_s q + k_s y = 0 \end{cases}$$

Sostituendo $y = q + x$:

$$\begin{cases} m_p\ddot{q} + c_p\dot{q} + k_p q = c_s\dot{x} + k_s x + f \\ m_s\ddot{x} + c_s\dot{x} + k_s x = -m_s\ddot{q} \end{cases}$$

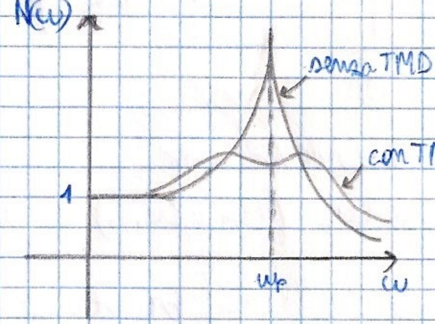
Sommiamo le due equazioni e teniamo la seconda insieme alla somma:

$$\begin{cases} (m_p+m_s)\ddot{q} + m_s\ddot{x} + c_p\dot{q} + k_p q = f \\ m_s\ddot{x} + c_s\dot{x} + k_s x = -m_s\ddot{q} \end{cases}$$

Dividiamo la prima equazione per m_p, la seconda per m_s e definiamo $\mu = \frac{m_s}{m_p}$ (rapporto di massa), $2\xi_p\omega_p = \frac{c_p}{m_p}$, $2\xi_s\omega_s = \frac{c_s}{m_s}$, $\omega_s^2 = \frac{k_s}{m_s}$ e $\omega_p^2 = \frac{k_p}{m_p}$:

$$\begin{cases} (1+\mu)\ddot{q} + \mu\ddot{x} + 2\xi_p\omega_p\dot{q} + \omega_p^2 q = f\cdot\frac{1}{m_p} \\ \ddot{x} + 2\xi_s\omega_s\dot{x} + \omega_s^2 x = -\ddot{q} \end{cases}$$

Attraverso l'analisi in frequenza è possibile ottenere la frequenza di accordo dello smorzatore con la struttura. Si considera il rapporto $\alpha = \frac{\omega_s}{\omega_p}$ tracciando curve che rappresentano $N(\omega)$ (fattore di magnificazione) al variare di α e ξ_s (passanti per punti fissi che tutte le curve hanno in comune). Il rapporto di frequenza ottimale è $\alpha_{ottimale} = \frac{1}{1+\mu}$. Se ad esempio $\mu = 0{,}01 \Rightarrow \alpha = 0{,}99$ (μ è generalmente piccolo poiché $m_s << m_p$). Ecco un esempio di grafico di $N(\omega)$:



$\xi_p = 5‰$

$N_{max} = 100$